RJEŠENJA-BODOVANJE: Alg. Strukture – prvi test (05.11.2026.)

!!! Dana rješenja su napisana onako kako bi uvijek trebalo rješavati zadatke na testovima, kolokvijima i pisanim ispitima. Posebno treba: (1) voditi računa da napisana argumentacija bude precizna, jasna i nedvosmislena; (2) korektno koristiti matematičku notaciju; (3) pisati čitko.

---

1. *Neka je $\mathcal{S}$ skup svih realnih $n \times n$ regularnih matrica i neka je $W \in \mathcal{S}$ neka fiksirana matrica. Na $\mathcal{S}$ definiramo binarnu operaciju $*$ tako da za $A, B \in \mathcal{S}$ stavimo $A * B := AWB$, gdje se AWB računa kao standardno množenje matrica. Je li $(\mathcal{S}, *)$ grupa?*

   Rješenje. ———————-

   (0.5 **boda)** Očito je $A * B$ regularna matrica; tj., $A * B \in \mathcal{S}$. Nadalje, imamo

   $$(A * B) * C = (AWB) * C = (AWB)WC = AW(BWC) = AW(B * C) = A * (B * C);$$

   tj., $(\mathcal{S}, *)$ je polugrupa.

   (0.5 **boda)** Gledamo postoji li $E \in \mathcal{S}$ t.d. je $A * E = AWE = A$, za svaku $A \in \mathcal{S}$. Očito je nužno $WE = I \Leftrightarrow E = W^{-1}$. Još provjerimo da je $E * A = W^{-1} * A = W^{-1}WA = A$. Slijedi da je $E = W^{-1}$ neutral; i zato je $(\mathcal{S}, *)$ monoid.

   (0.5 **boda)** Za $A \in \mathcal{S}$ gledamo postoji li $B \in \mathcal{S}$ t.d. je $A * B = AWB = E = W^{-1}$. Iz zadnje jednakosti imamo: $B = W^{-1}A^{-1}W^{-1}$. Još provjerimo:

   $$(W^{-1}A^{-1}W^{-1}) * A = W^{-1}A^{-1}W^{-1}WA = W^{-1} = E.$$

   Slijedi da je B inverz od A u $\mathcal{S}$; i zato je $(\mathcal{S}, *)$ grupa.

   Napomena. Iako za to nisu uzimani bodovi, treba naglasiti kako su mnogi studenti napisali kako je $\mathcal{S}$ (grupa uz definiranu operaciju $*$) jednaka općoj linearnoj grupi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; što, striktno govoreći, nije točno. Iako su kao skupovi ta dva objekta jednaka, u definiciji *opće lin. grupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, gdje je $\mathbb{F}$ bilo koje polje, se podrazumijeva da je množenje u grupi standardno množenje matrica. (Isto tako činjenica jest kako su grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ i $(\mathcal{S}, *)$ izomorfne; što se lako može pokazati!)

---

2. *Definirajmo preslikavanje $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ s $f(A) := \dfrac{\det A}{|\det A|}$. Je li f homomorfizam grupa? Ako da, odredite jezgru i sliku od f.*

   Rješenje. ———————-

   (0.5 **boda)** Koristeći B-C tm., imamo

   $$f(AB) = \frac{\det(AB)}{|\det(AB)|} = \frac{\det A}{|\det A|}\frac{\det B}{|\det B|} = f(A)f(B);$$

   tj., f je homo. grupa.

(0.5 boda) Jezgra $\ker f = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \dfrac{\det A}{|\det A|} = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det A \in \mathbb{R}_+\}$.

(0.5 boda) Slika je

$$\mathrm{im} f = \{\frac{\det A}{|\det A|} \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\} = (\text{jer } \det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times \text{ epi.}) = \{\frac{z}{|z|} \mid z \in \mathbb{C}^\times\} = S^1;$$

gdje je grupa $S^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ tzv. 1-dimenzionalni torus.

Napomena. Samo napisano rješenje $\mathrm{im} f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bez postupka ili dodatne argumentacije nosi 0 bodova.

---

3. *Neka je* $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ i } xz \neq 0 \right\}$, *grupa realnih* 2×2 *regularnih gornje trokutastih matrica. Definirajmo* T *kao skup svih matrica oblika* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, *gdje su* $a \in \mathbb{Q}^\times$ *i* $b \in \mathbb{R}$, *Je li* T *normalna podgrupa u* G*?*

Rješenje. ———————-

(1 bod) Prvo treba vidjeti da je T podgrupa od G. U tu svrhu neka su $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ iz T. Onda je $AB = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}$, gdje je $ac \in \mathbb{Q}^\times$ i $ad + bc \in \mathbb{R}$; i zato je $AB \in T$. Nadalje, inverz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ je također iz T; jer $a \in \mathbb{Q}^\times \Leftrightarrow 1/a \in \mathbb{Q}^\times$ i još $-b/a^2 \in \mathbb{R}$. Po *kriteriju podgrupe* imamo: $T \leq G$.

(1 bod) Za $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G$ i $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in T$ imamo

$$MTM^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/x & -ay/(xz) + b/zy \\ 0 & a/z \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a & xb/z \\ 0 & a \end{pmatrix} \in T;$$

i zato je $T \trianglelefteq G$.

Napomena. Najčešće greške uključuju neprovjeravanje da je T podgrupa, kao i nepoznavanje izračunavanja inverza matrice.